13. svibnja 2022.

Prvi kolokvij iz kolegija **Modalna logika**

Prvi zadatak nosi maksimalno 10 bodova, a ostali zadaci po 5 bodova.

1. Normalnu modalnu logiku **T** dobivamo proširenjem sistema **K** aksiomom $\Box p \to p$. Dokažite da je logika **T** adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih refleksivnih okvira.

2. Za relaciju $R \subseteq W \times W$ kažemo da je euklidska relacija ako za sve $x, y, z \in W$ vrijedi da xRy i xRz povlači yRz. Dokažite da za svaki Kripkeov okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{F} \Vdash \Diamond p \to \Box\Diamond p \text{ ako i samo ako relacija } R \text{ je euklidska.}$$

3. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ neki Kripkeov model. Dokažite da postoji najveća bisimulacija $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}$. Dokažite da je najveća bisimulacija jedna relacija ekvivalencije.

4. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ Kripkeovi modeli i $f : W \to W'$ ograničeni morfizam. Dokažite da za svaki svijet $w \in W$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', f(w)$.

5. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ neki Kripkeov model i Γ neki skup formula koji je zatvoren na potformule. Na skupu W definiramo binarnu relaciju $\sim_\Gamma$ ovako:

$$w \sim_\Gamma u \quad \text{ako i samo ako} \quad \begin{array}{l} \text{za svaku formulu } \varphi \in \Gamma \text{ vrijedi sljedeća} \\ \text{ekvivalencija: } w \Vdash \varphi \Leftrightarrow u \Vdash \varphi \end{array}$$

   Lako je provjeriti da je $\sim_\Gamma$ relacija ekvivalencije (ne trebate provjeravati). Za svaki $w \in W$ neka je s $[w]_\Gamma$ označena pripadna klasa ekvivalencije. Neka je $W_\Gamma = \{[w]_\Gamma : w \in W\}$. Zatim, definiramo valuaciju V_Γ ovako:

$$V_\Gamma(p) = \begin{cases} \{[w]_\Gamma : w \in V(p)\}, & \text{ako } p \in \Gamma, \\ \emptyset, & \text{inače} \end{cases}$$

   Odredite primjer jednog svojstva koje mora imati neka relacija $\tilde{R} \subseteq W_\Gamma \times W_\Gamma$ tako da je $\tilde{\mathfrak{M}} = (W_\Gamma, \tilde{R}, V_\Gamma)$ jedna filtracija modela $\mathfrak{M}$. Sve svoje tvrdnje dokažite.